Symmetry

right 1952 by Princeton University Press, Princeton, U.S.A.)

Traduzione dall'inglese di
Olivia Lopez

Prima edizione italiana: aprile 1962
Copyright by
©
Giangiacomo Feltrinelli Editore
Milano

H. WEYL

LA SIMMETRIA

FELTRINELLI

dove gli a_{ij} sono *interi*. Ma anche i coefficienti della trasformazione inversa (1′) devono essere interi, altrimenti e'_1, e'_2 non costituirebbero la base di un reticolo. Per le coordinate esistono due trasformazioni lineari (2), (2′) inverse l'una dell'altra ed a coefficienti interi:

$$(2'') \qquad \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a'_{11}, & a'_{12} \\ a'_{21}, & a'_{22} \end{pmatrix}.$$

I matematici chiamano *unimodulari* le trasformazioni omogenee lineari a coefficienti interi che abbiano un'inversa dello stesso tipo; è facile vedere che una trasformazione lineare a coefficienti interi è unimodulare se, e soltanto se, il suo modulo, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ è uguale a $+1$ o a -1.

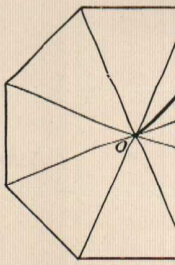
Per determinare tutti i possibili gruppi discontinui di congruenze a rapporto doppio infinito procederemo ora nel modo seguente: scegliamo un punto O come origine e rappresentiamo le traslazioni del nostro gruppo Δ col reticolo L dei punti in cui esse portano il punto O. Ogni operazione del gruppo può considerarsi come una rotazione attorno ad O seguita da una traslazione. La prima parte, quella rotatoria, riporta il reticolo su se stesso. Inoltre, queste parti rotatorie formano un gruppo discontinuo e pertanto *finito* di rotazioni $\Gamma = \{\Delta\}$. Nella terminologia cristallografica è questo gruppo che determina la *classe* di simmetria dell'ornamento. Γ deve essere uno dei gruppi della tabella di Leonardo (7),

$$(8) \qquad C_n,\ D_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

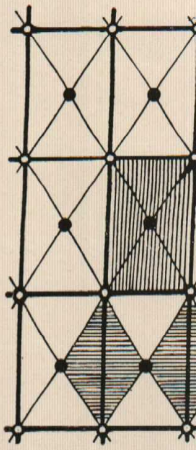
ma deve appartenere a un gruppo le cui rotazioni riportano il reticolo L su se stesso. Questa relazione fra il gruppo di rotazione Γ ed il reticolo L impone alcune limitazioni ad entrambi.

Per quel che riguarda 1, esso esclude dalla tabella tutti i valori di n eccetto $n = 1, 2, 3, 4, 6$. Si noti che $n = 5$ è fra i valori esclusi! Poiché il reticolo ammette la rotazione di 180°, la rotazione minima che lo lasci invariato deve essere un sottomultiplo di 180°, o di

$$360^\circ \text{ diviso } 2 \text{ o } 4 \text{ o } 6 \text{ o } 8 \text{ o } \ldots$$



Dobbiamo dimostrare che non è possibile usare numeri da 8 in su. Si prenda il caso di $n = 8$ e sia A fra tutti i punti del reticolo $\neq O$ il più vicino ad O (v. fig. 57). Allora l'intero ottagono $A = A_1, A_2, A_3, \ldots$ risultante da A per le rotazioni del piano attorno ad O di un ottavo del l'angolo giro consiste di punti del reticolo. Essendo $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ vettori del reticolo, il vettore differenza $\overrightarrow{A_1A_2}$ deve a sua volta appartenere al nostro reticolo, cioè il punto B definito da $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{A_1A_2}$ dovrebbe essere un punto del reticolo. Ma ciò porta a una contraddizione, perché B è più vicino ad O di $A = A_1$; infatti il lato A_1A_2 dell'ottagono regolare è minore del suo raggio OA_1. Il gruppo Γ è quindi uno dei seguenti 10 possibili gruppi:



$$(9) \quad C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_6;\ D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_6.$$

È facile vedere che per ognuno di questi gruppi esistono effettivamente reticoli che rimangono invariati rispetto alle operazioni del gruppo.

Ovviamente qualsiasi reticolo per C_1 e C_2 andrà bene, poiché ogni reticolo è invariante rispetto all'identità e alla rotazione di 180°. Consideriamo invece D_1, formato dall'identità e dalla riflessione rispetto a un asse l passante per O. Vi sono due tipi di reticoli che restano invariati rispetto alle operazioni di questo gruppo: il reticolo rettangolare e il reticolo a diamante (v. fig. 58). Si ottiene il

L'espressione algebrica delle operazioni di uno dei gruppi C_n non dipende dalla scelta della base vettoriale cartesiana. Ciò non si verifica invece per i gruppi D_n; qui si normalizza l'espressione algebrica introducendo, come primo vettore base e_1, un vettore che giaccia lungo uno degli assi di riflessione. Un gruppo di rotazioni si esprime in funzione del sistema di coordinate cartesiane come un gruppo di *trasformazioni ortogonali; delle sue espressioni* in due qualsiasi di tali sistemi di coordinate, *legati da una trasformazione ortogonale*, diremo che sono ortogonalmente equivalenti. I risultati della ricerca di Leonardo possono dunque formularsi oggi in linguaggio algebrico nel modo seguente: egli fece un elenco di gruppi di trasformazioni ortogonali tali che 1) due qualsiasi gruppi dell'elenco sono ortogonalmente non equivalenti; 2) un qualsiasi gruppo finito di trasformazioni ortogonali è equivalente ortogonalmente ad uno dei gruppi dell'elenco. Più brevemente: egli fece un elenco *completo* dei gruppi finiti di trasformazioni ortogonali *ortogonalmente non equivalenti*. Questo potrà sembrare un modo inutilmente complicato di dire una cosa semplice, ma tra poco se ne vedrà l'utilità.

La *simmetria degli ornamenti* ha a che fare con i gruppi discontinui di corrispondenze congruenti nel piano. Se un gruppo Δ di questo genere contiene traslazioni, sarebbe assurdo postulare la sua finitezza, perché l'iterazione di una traslazione a, diversa dall'identità o, dà luogo a un numero infinito di traslazioni xa ($x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Perciò sostituiamo la finitezza con la *discontinuità*: questa condizione richiede che nel gruppo non vi sia alcuna operazione arbitrariamente vicina all'identità, eccetto l'identità stessa. In altre parole, esiste un numero positivo ε tale che *ogni trasformazione* (6) del nostro gruppo per la quale i numeri

$$\begin{pmatrix} a_{11} - 1, & a_{12}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22} - 1, & b_2 \end{pmatrix}$$

siano compresi fra $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$ sia l'identità (per cui tutti questi numeri sono eguali a zero). Le traslazioni contenute nel nostro gruppo formano un gruppo discontinuo Δ *di traslazioni. Per tale gruppo vi sono tre* possibilità: o esso consta della sola identità, *il vettore nullo* o; o tutte le *traslazioni del* gruppo sono iterazioni xe di una traslazione base $e \neq o$ ($x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); oppure queste traslazioni (vettori) formano un *reti-*

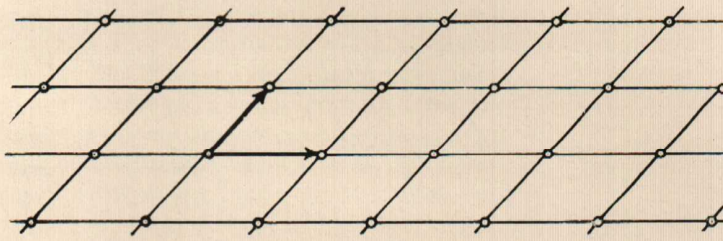


Fig. 56.

colo bidimensionale, cioè constano delle combinazioni lineari $x_1e_1 + x_2e_2$ con coefficienti *interi* x_1, x_2 di due vettori linearmente indipendenti e_1, e_2. Il terzo caso è quello del rapporto doppio infinito, quello che ci interessa. Qui i vettori e_1, e_2 formano quella che chiamiamo *base del reticolo*. Scelto un punto O, come origine, i punti in cui O si trasporta per tutte le traslazioni del reticolo costituiscono un reticolo di punti le cui posizioni formano dei parallelogrammi (v. fig. 56).

Ci si chiederà subito fino a che punto sia arbitraria la scelta della base del reticolo per un dato reticolo. Se un'altra base è costituita da e'_1, e'_2, bisognerà allora che

con al centro la testa della Medusa, quale simbolo della Sicilia (Trinacria, isola a tre vertici). I matematici ricorderanno questo simbolo che funge da sigillo sulla copertina dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. La versione a quattro invece che a tre braccia è la svastica, e qui non ci sarà bisogno di riprodurla: essa è uno dei simboli primordiali dell'umanità, proprietà comune di più civiltà apparentemente indipendenti. Nella mia conferenza sulla simmetria tenuta a Vienna nell'autunno del 1937, poco prima che le orde di Hitler invadessero l'Austria, a proposito della svastica aggiunsi: " Oggigiorno essa è divenuta un simbolo di terrore assai più terribile della testa anguicrinita di Medusa "; fra il pubblico si scatenò un pandemonio di applausi e di fischi. Il motivo per cui si attribuì potere magico a questi simboli risiede forse nella loro sorprendente simmetria incompleta: rotazioni senza riflessioni. La figura 41 rappresenta l'armoniosa scala del pulpito nel Duomo di Santo Stefano a Vienna: una ruota a guisa di svastica si alterna con una a guisa di triscele.

Questo basti per quanto concerne la simmetria di rotazione nell'ambito delle due dimensioni. Quando si ha a che fare con motivi potenzialmente infiniti, come gli ornamenti a fascia o i gruppi infiniti, l'operazione rispetto alla quale il motivo resta invariante non è necessariamente una congruenza: potrebbe essere una similitudine. Una similitudine in una sola dimensione, che non sia una semplice traslazione, mantiene un punto O fisso ed è una dilatazione s da O secondo un certo rapporto $a : 1$, ove $a \neq 1$. Non è una limitazione essenziale supporre $a > 0$. La ripetizione illimitata di questa operazione genera il gruppo Σ composto dalle dilatazioni

$$(2) \qquad s^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$



Fig. 41.

Ottimo esempio di questo tipo di simmetria è la conchiglia *Turritella duplicata* della figura 42. È davvero sorprendente vedere con che esattezza la larghezza delle spire consecutive di questa conchiglia segua la legge della progressione geometrica.

Le lancette di alcuni orologi ruotano con moto continuo uniforme, altre scattano di minuto in minuto. Le rotazioni di un numero intero di minuti formano un sottogruppo discontinuo entro il gruppo continuo di tutte le rotazioni, ed è naturale considerare una rotazione s e le sue iterazioni (2) come se

alla loro formazione; ma, in se stesso, ognuno di quei freddi prodotti era di una simmetria assoluta, di una gelida regolarità, e questo era l'elemento pauroso, antiorganico, ostile alla vita. Quelle stelline erano troppo regolari, la sostanza ordinata per la vita non lo era mai a quel punto, la vita rifuggiva dall'esattezza, la riteneva micidiale, quasi come il mistero stesso della morte, e Hans Castorp credette di capire perché i costruttori di basiliche degli antichi templi avessero introdotto a bella posta e in segreto piccole modificazioni nella simmetria nei loro ordini di colonne."[5]

Fino ad ora ci siamo interessati solo delle rotazioni proprie. Se prendiamo in considerazione le rotazioni improprie, in geometria piana abbiamo le due seguenti possibilità per i gruppi finiti di rotazioni attorno ad un centro O, che corrispondono ai due gruppi incontrati nella simmetria ornamentale unidimensionale: 1) il gruppo che consiste della ripetizione di una singola rotazione propria di una frazione di 360°, $\alpha = 360^\circ/n$; 2) il gruppo che consta di queste rotazioni combinate con le riflessioni rispetto a n assi che formano angoli $^1/_2\,\alpha$. Il primo gruppo viene chiamato gruppo ciclico C_n, il secondo gruppo diedrico D_n. Questi sono dunque i soli due tipi possibili di simmetrie centrali nel piano:

(1) $C_1, C_2, C_3 \ldots; \quad D_1, D_2, D_3, \ldots$

dove C_1 indica l'assenza totale di simmetria, e D_1 la sola simmetria bilaterale. In architettura predomina la simmetria di ordine quattro. Le torri hanno spesso simmetria esagonale. Gli edifici a pianta centrale con simmetria di ordine 6 sono assai meno frequenti. Dopo l'antichità, il primo edificio a pianta centrale pura è S. Maria degli Angeli a Firenze (iniziata nel 1434), a forma ottagonale. Molto rari sono i pentagoni: nel 1937 a Vienna, in occasione d'una mia conferenza sulla simmetria, dissi che ne conoscevo un solo esempio, e assai poco rilevante, l'atrio di passaggio fra San Michele di Murano e l'esagonale Cappella Emiliana a Venezia. Oggi, naturalmente, abbiamo il Pentagono di Washington: per la sua grandezza e per la sua forma facilmente riconoscibile offre un ottimo bersaglio ai bombardieri. Leonardo si impegnò a determinare sistematicamente le possibili simmetrie di un edificio a pianta centrale, ed a studiare il modo di innestarvi nicchie e cappelle senza distruggere la simmetria del nucleo. Nella terminologia astratta moderna i suoi risultati corrispondono essenzialmente alla tabella sopra riportata dei possibili gruppi finiti di rotazioni (proprie ed improprie) nell'ambito delle due dimensioni.



Fig. 39.

Fino a qui la simmetria di rotazione di un piano è sempre stata accompagnata dalla simmetria di riflessione; ma è stato più o meno un caso che io abbia riportato parecchi esempi per il gruppo diedrico D_n e nessuno per il più semplice gruppo ciclico C_n. Nella figura 39 ci sono due fiori: un *geranio* (I) con simmetria del gruppo D_5, e una *Vinca herbacea* (II) che invece, a causa dell'asimmetria dei suoi petali, appartiene al gruppo C_5, dalla simmetria più limitata. La figura 40 mostra forse la più semplice fra le figure dotate di simmetria di rotazione, il tripode ($n = 3$). Se si vuole eliminare la simmetria di riflessione che l'accompagna, basta aggiungere tre banderuole ai tre bracci, ottenendo così un triscele, antico simbolo magico. I greci l'usarono, per esempio,

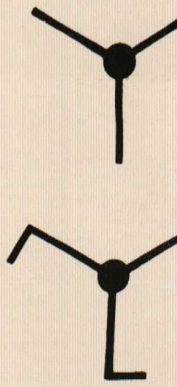


Fig. 40.

[5] Dürer considerava il suo canone della figura umana più come una regola da cui deviare che non come una regola a cui tendere. Le *temperaturae* di Vitruvio sembra abbiano lo stesso significato, e forse la parolina "quasi" nel detto attribuito a Policleto, citato nel capitolo I, nota 1, allude alla medesima cosa.